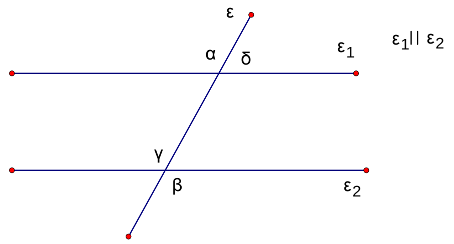
4.1 -4.5
Ασκήσεις σχολικού βιβλίου σελίδας 82 – 83

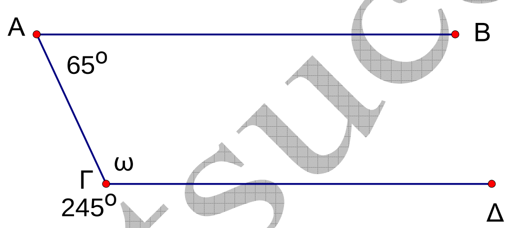
Ερωτήσεις Κατανόησης

1.
i) Πώς ονομάζονται οι γωνίες α και β του παρακάτω σχήματος και τι σχέση έχουν μεταξύ τους;
ii) Τι ισχύει για τις γωνίες γ και δ ;



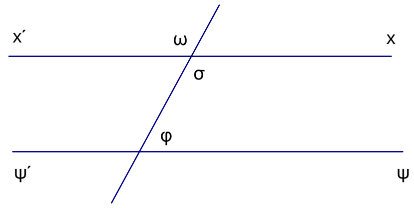
Απάντηση
i) Εκτός εναλλάξ και είναι ίσες, αφού α = γ και γ = β
ii) Είναι παραπληρωματικές, αφού α + δ = 180^o και α = γ

2.
Να εξηγήσετε γιατί η ΑΒ είναι παράλληλη στην ΓΔ



Απάντηση
Προφανώς η γωνία ω είναι ίση με $\hat{\omega} = 360^o - 245^o = 115^o$
Αφού $\hat{\omega} + \Gamma\hat{A}B = 115^o + 65^o = 180^o$ θα είναι ΑΒ || ΓΔ

3.
Αν $\omega = 120^o - \theta$ και $\varphi = 60^o + \theta$ να εξηγήσετε γιατί x΄x ‖ ψ΄ψ



Απάντηση
$\sigma + \varphi = \omega + \varphi = 120^o - \theta + 60^o + \theta = 180^o \Rightarrow$ x΄x ‖ ψ΄ψ

4.
Ν αναφέρετε 5 τρόπους για να αποδείξουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες
Απάντηση
i) Είναι κάθετες στην ίδια ευθεία
ii) Τέμνονται από τρίτη και σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες
iii) Τέμνονται από τρίτη και σχηματίζουν δύο εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες
iv) Τέμνονται από τρίτη και σχηματίζουν δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές
v) Είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία

5.
Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι
i) Συμπληρωματικές;
ii) Ίσες;
iii) Παραπληρωματικές;
iv) Κανένα από τα παραπάνω;
Δικαιολογήστε την απάντηση σας

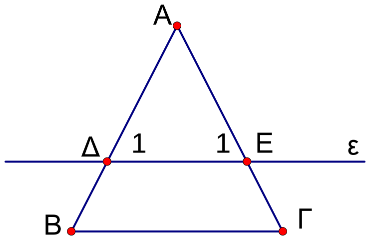
Απάντηση
Είναι ίσες διότι έχουν τις πλευρές παράλληλες και είναι οξείες

Ασκήσεις εμπέδωσης

1.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε παράλληλη προς τη βάση του ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Λύση



$\varepsilon \parallel \mathrm{B\Gamma} \;\Rightarrow\; \hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{B}}$ και $\hat{\mathrm{E}}_1 = \hat{\Gamma}$ **(1)**

τρ. ΑΒΓ ισοσκελές $\Rightarrow\; \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$ **(2)**

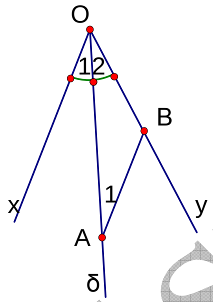
(1), (2) $\Rightarrow\; \hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{E}}_1$

άρα τρ, ΑΔΕ ισοσκελές

2.

Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Α της διχοτόμου της. Αν η παράλληλη από το Α προς την Οx τέμνει την Oy στο Β, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές.

Λύση



ΑΒ ∥ Ox $\Rightarrow\; \hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{O}}_1$

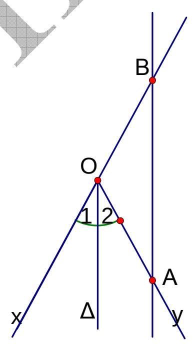
Αλλά $\hat{\mathrm{O}}_2 = \hat{\mathrm{O}}_1$

Άρα $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{O}}_2 \;\Rightarrow$ τρ. ΟΑΒ ισοσκελές.

3.

Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και η διχοτόμος της ΟΔ. Από σημείο Α της Οy φέρουμε παράλληλη προς την ΟΔ, που τέμνει την προέκταση της Οx στο Β. Να αποδείξετε ότι ΟΑ = ΟΒ.

Λύση



ΑΒ παράλληλη ΟΔ $\Rightarrow\; \hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{O}}_2$ (εντός εναλλάξ)

και $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{O}}_1$ (εντός εκτός επί τα αυτά)

αλλά $\hat{\mathrm{O}}_1 = \hat{\mathrm{O}}_2$

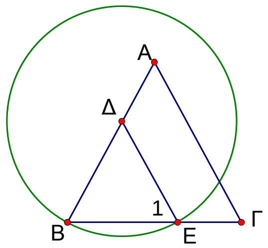
άρα $\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}} \;\Rightarrow$

τρ. ΟΑΒ ισοσκελές με ΟΑ = ΟΒ

4.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Αν ο κύκλος (Δ, ΔΒ) τέμνει τη ΒΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι ΔΕ παράλληλη ΑΓ.

Λύση



$\mathrm{ΔΒ = ΔΕ}$ (ακτίνες) $\Rightarrow \hat{B} = \hat{E}_1$

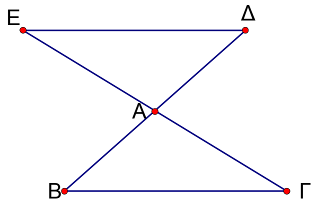
$\mathrm{ΑΒ = ΑΓ} \Rightarrow \hat{B} = \hat{\Gamma}$

Άρα $\hat{E}_1 = \hat{\Gamma} \Rightarrow \mathrm{ΕΔ} \parallel \mathrm{ΓΑ}$

5.

Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι ΔΕ παράλληλη ΒΓ.

Λύση



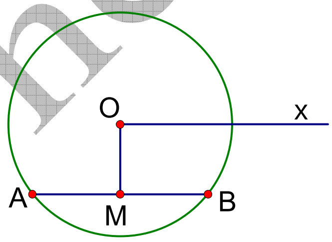
(Π-Γ-Π) $\Rightarrow$ τρ. ΑΔΕ = τρ. ΑΒΓ $\Rightarrow$

$\hat{\Delta} = \hat{B} \Rightarrow$ ΔΕ παράλληλη ΒΓ

6.

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και Μ το μέσο χορδής του ΑΒ. Φέρουμε $\mathrm{Ox} \perp \mathrm{OM}$. Να αποδείξετε ότι Οx παράλληλη ΑΒ.

Λύση



Μ μέσο της χορδής ΑΒ $\Rightarrow \mathrm{OM} \perp \mathrm{AB}$

αλλά και $\mathrm{OM} \perp \mathrm{Ox}$

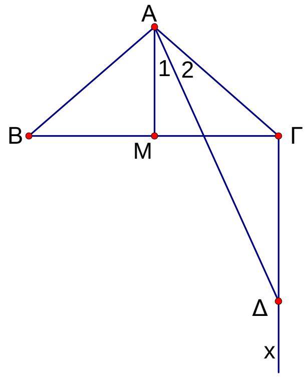
άρα Οx παράλληλη ΑΒ

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1.

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και η διάμεσός του ΑΜ. Φέρουμε $\Gamma x \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτή τμήμα ΓΔ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}\Gamma$.

Λύση

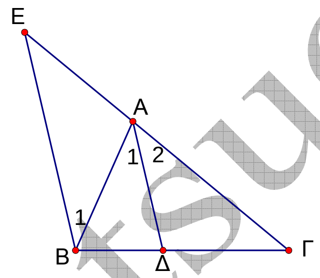


ΑΜ διάμεσος του ισοσκελούς $\Rightarrow$
$AM \perp B\Gamma$
αλλά και $\Gamma x \perp B\Gamma$
άρα $\Gamma x \parallel AM \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{\Delta}$ **(1)**
$\Gamma\Delta = AB = A\Gamma \Rightarrow$ τρ. ΓΑΔ ισοσκελές $\Rightarrow$
$\hat{A}_2 = \hat{\Delta}$ **(2)**
(1) και (2) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$ άρα
ΑΔ διχοτόμος

2.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από την κορυφή Β φέρουμε $BE \parallel A\Delta$ που τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο Ε. Να αποδείξετε ότι
ΕΓ = ΑΒ + ΑΓ

Λύση

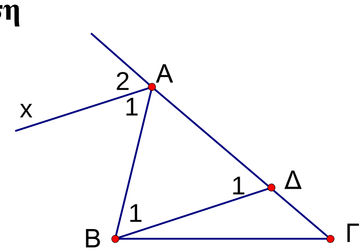


Αρκεί να αποδείξουμε ότι ΕΑ = ΑΒ
$EB \parallel A\Delta \Rightarrow \hat{E} = \hat{A}_2$ και $\hat{B}_1 = \hat{A}_1$
Αλλά $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$
Άρα $\hat{E} = \hat{B}_1$ δηλαδή
τρ. ΑΒΕ ισοσκελές με ΕΑ = ΑΒ

3.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και η εξωτερική διχοτόμος του Αx. Από την κορυφή Β φέρουμε $B\Delta \parallel Ax$ που τέμνει την ΑΓ στο Δ. Να αποδείξετε ότι
ΔΓ = ΑΓ – ΑΒ.

Λύση

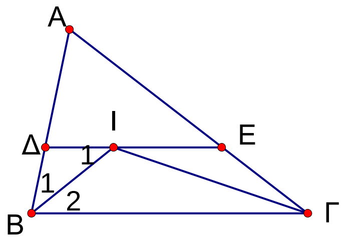


Αρκεί να αποδείξουμε ότι ΑΔ = ΑΒ
ή αρκεί $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$
$B\Delta \parallel Ax \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{A}_1$ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_2$
Αλλά $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$
Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$

4.

Από το έκκεντρο Ι τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη της ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι
ΔΕ = ΒΔ + ΓΕ

Λύση



$I\Delta \parallel B\Gamma \Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{B}_2$

Ι έκκεντρο $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2$

Άρα $\hat{I}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow$ τρ. ΔΒΙ ισοσκελές

με ΔΙ = ΔΒ **(1)**

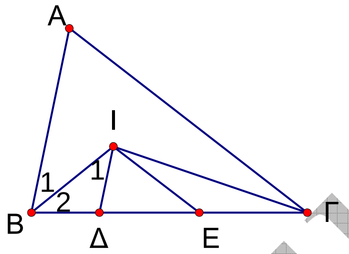
Ομοίως ΕΙ = ΕΓ **(2)**

(1) + (2) $\Rightarrow$ ΔΙ + ΕΙ = ΔΒ + ΕΓ $\Rightarrow$ ΔΕ = ΔΒ + ΕΓ

5.

Από το έκκεντρο Ι τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε $I\Delta \parallel AB$ και $IE \parallel A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΔΙΕ ισούται με τη ΒΓ.

Λύση



$I\Delta \parallel AB \Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{B}_1$

Ι έκκεντρο $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2$

Άρα $\hat{I}_1 = \hat{B}_2 \Rightarrow$ τρ. ΔΒΙ ισοσκελές

με ΔΙ = ΔΒ **(1)**

Ομοίως ΕΙ = ΕΓ **(2)**

(1) + (2) $\Rightarrow$ ΔΙ + ΕΙ = ΔΒ + ΕΓ $\Rightarrow$ ΔΙ + ΕΙ + ΔΕ = ΔΒ + ΕΓ + ΔΕ

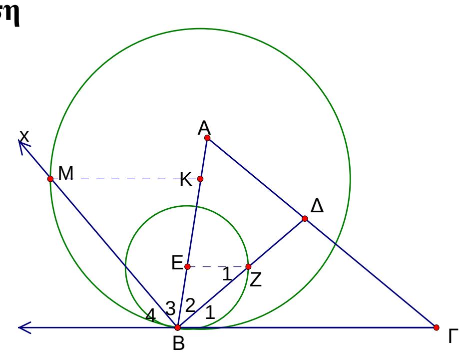
Άρα περίμετρος του τρ. ΙΔΕ = ΒΓ

Σύνθετα Θέματα

1.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΒΔ και η εξωτερική διχοτόμος του Βx. Θεωρούμε δύο σημεία Ε και Κ της πλευράς ΑΒ. Αν ο κύκλος (Ε, ΕΒ) τέμνει τη ΒΔ στο Ζ, ενώ ο κύκλος (Κ, ΚΒ) τέμνει τη Βx στο Μ, να αποδείξετε ότι ΕΖ||ΜΚ.

Λύση



Παρατηρούμε ότι οι ΕΖ και ΜΚ είναι || ΒΓ.
Προσπαθούμε να το αποδείξουμε

ΕΒ = ΕΖ (ακτίνες) $\Rightarrow \hat{Z}_1 = \hat{B}_2$

ΒΔ διχοτόμος $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2$

Άρα $\hat{Z}_1 = \hat{B}_1$ και επειδή είναι εντός – εναλλάξ, θα έχουμε

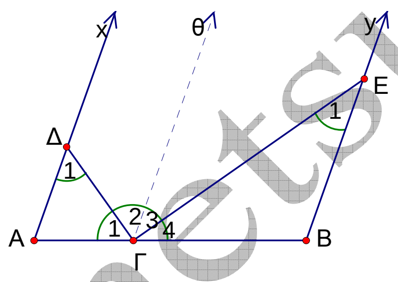
ΕΖ||ΒΓ

Ομοίως ΜΚ||ΒΓ

2.

Από τα άκρα ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ φέρουμε προς το ίδιο ημιεπίπεδο δύο παράλληλες ημιευθείες Αx και Βy. Παίρνουμε Γ τυχαίο σημείο του ΑΒ, και στις Αx, Βy τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε ΑΔ = ΑΓ και ΒΕ = ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\hat{\Gamma}E$ είναι ορθή.

Λύση



Φέρουμε Γθ|| Αx και Βy

Τότε $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Delta}_1$ (εντός – εναλλάξ)

ΑΓ = ΑΔ $\Rightarrow \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$

Άρα $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma}_1 \Rightarrow$

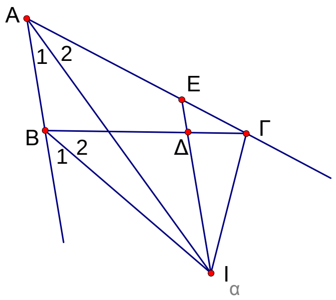
ΓΔ διχοτόμος της $A\hat{\Gamma}\theta$

Ομοίως ΓΕ διχοτόμος της $B\hat{\Gamma}\theta$

Άρα είναι ΓΔ ⊥ ΓΕ σαν διχοτόμοι δύο εφεξής παραπληρωματικών γωνιών.

3.
Από το παράκεντρο I_α τριγώνου $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ φέρουμε παράλληλη στην AB, που τέμνει τις πλευρές $B\Gamma$ και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E = AE - B\Delta$.

Λύση



$I_\alpha E \parallel BA \quad \Rightarrow \quad A\hat{I}_\alpha E = \hat{A}_1$

AI_α διχοτόμος $\quad \Rightarrow \quad \hat{A}_2 = \hat{A}_1$

Άρα $\quad A\hat{I}_\alpha E = \hat{A}_2 \Rightarrow$ τρ. EAI_α ισοσκ.

με $\quad EI_\alpha = EA \qquad$ **(1)**

Ομοίως $\quad I_\alpha \Delta \parallel BA \quad \Rightarrow$ …………..

$\Delta I_\alpha = \Delta B \qquad$ **(2)**

$(1) - (2) \quad \Rightarrow \quad \Delta E = AE - B\Delta$

4.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ < ΑΓ$ και Μ σημείο της πλευράς ΒΓ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

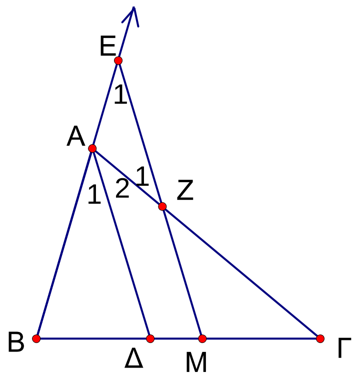
i) Το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές.

ii) ΒΕ + ΓΖ = σταθερό

iii) Αν Μ το μέσο της ΒΓ τότε α) $ΒΕ = ΓΖ = \frac{ΑΓ + ΑΒ}{2}$

β) $ΑΕ = ΑΖ = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$

Λύση



i) $ΕΖΜ \parallel ΕΑΒ \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{A}_1$ και $\hat{Z}_1 = \hat{A}_2$

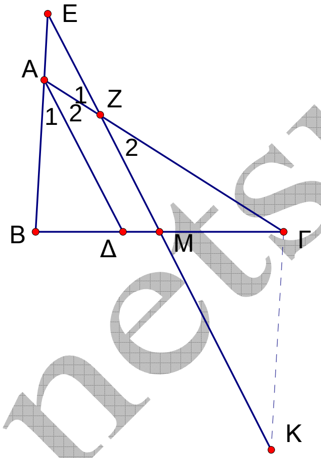
ΑΔ διχοτόμος $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$

Άρα $\hat{E}_1 = \hat{Z}_1$ οπότε

τρ. ΑΕΖ ισοσκελές με ΑΕ = ΑΖ

ii) ΒΕ + ΓΖ = ΒΑ + ΑΕ + ΓΑ – ΑΖ =

= ΒΑ + ΓΑ = σταθερό



iii) Από το Γ φέρουμε παράλληλη στην ΕΑΒ, που τέμνει την ΕΖΜ σε σημείο Κ.

(Γ-Π-Γ) $\Rightarrow$ τρ. ΜΓΚ = τρ.ΜΒΕ $\Rightarrow$

ΓΚ = ΕΒ **(1)**

Από i) έχουμε $\hat{E} = \hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$

$ΓΚ \parallel ΕΒ \Rightarrow \hat{E} = \hat{K}$

Άρα $\hat{Z}_2 = \hat{K} \Rightarrow$ τρ. ΓΖΚ ισοσκελές με

ΓΚ = ΓΖ **(2)**

Από (1) και (2) $\Rightarrow$ ΕΒ = ΓΖ

(ii) $\Rightarrow$ 2 ΒΕ = ΑΒ + ΑΓ $\Rightarrow$

$$ΒΕ = \frac{ΑΒ + ΑΓ}{2}$$

$$ΑΕ = ΒΕ – ΒΑ = \frac{ΑΒ + ΑΓ}{2} - ΒΑ$$

$$= \frac{ΑΒ + ΑΓ - 2ΒΑ}{2} = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$$